

Контрольные вопросы

Волна - распространяющееся возмущение, распространяющееся в пр-ве

Возмущ. $\xi(x, t)$ мен-ся в пр-ве и времени
волнов. процесс опис-ся ур-ем

(волновое ур-ние)

$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} - c_0^2 \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} = 0$$

фаз ск-ть волны

$= 0$ $\left(\frac{\partial^2 \xi(x, t)}{\partial x^2} - c_0^2 \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} = 0 \right)$ - одномер. случай

$\xi(x, t) = f(x - c_0 t) + g(x + c_0 t)$ - решение волн
ур-ния в виде бегущей волны. прямой и обратной

Соотношения

- c_0 - фаз. ск-ть $[\frac{м}{с}]$,
- λ - длина волны $[м]$,
- T - период $[с]$,
- γ - частота $[\frac{1}{с}] = [Гц]$,
- k - волновое число $[м^{-1}]$,
- ω - циклич. частота $[\frac{рад}{с}]$

$$\lambda = c_0 T = c_0 / \gamma$$

$$\gamma = 1 / T$$

$$k = 2\pi / \lambda = \omega / c_0$$

$$\omega = 2\pi / T$$

2. Акустич. волна - механич. волна, вызывающ. ощущение звука (следствие звука)

$\left[\frac{\partial^2 \rho}{\partial t^2} - c_0^2 \Delta \rho = 0 \right]$ плотность, $\left[\frac{\partial^2 p}{\partial t^2} - c_0^2 \Delta p = 0 \right]$ давление, $\left[\frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} - c_0^2 \Delta \varphi = 0 \right]$ потенциал
 - волновые ур-ния, получ. на основе линейных ур-ний гидродинамики * $\vec{v} = \text{grad } \varphi(\vec{r}, t) = \vec{\nabla} \varphi(\vec{r}, t)$

$c_0^2 = \frac{1}{\rho_0 \beta}$ - ск-ть звука в среде
равновес. плотн-ть ρ_0 - плотность среды, $\beta = \frac{1}{\rho_0} \left(\frac{\partial \rho}{\partial p} \right)_0$ - сжимаемость среды

$c_0^2 = \gamma \frac{p_0}{\rho_0}$ - ск-ть звука в газах (адиабат. процесс)

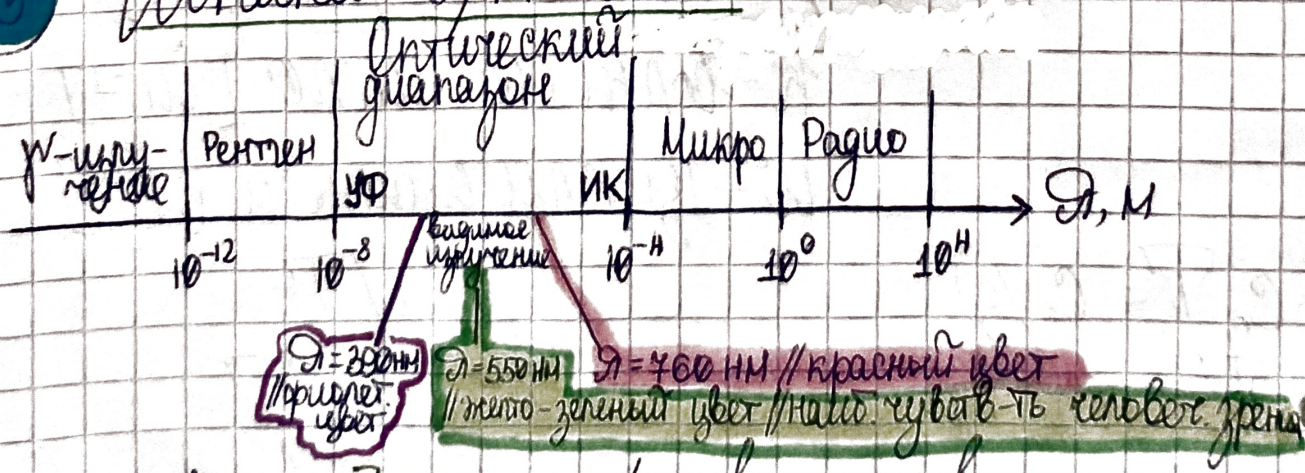
 p_0 - давление в норм. усл. $\approx 1,01 \cdot 10^5$ Па,
 γ - показатель адиабаты $\approx 1,4$ (в воздухе)
 ρ_0 - плотность возд. в норм. усл. $\approx 1,3 \cdot 10^{-3}$ кг/м³

$\Rightarrow c_{\text{возд}} \approx 331 \frac{\text{м}}{\text{с}}$
 Порог слышимости: $I_0 = 10^{-12} \frac{\text{Вт}}{\text{м}^2}$ (наиб. чувстви-тельность уха при $\nu = 1 \div 3$ кГц)
(min величина звук. давления, при к-ой звук данной частоты уже воспринимается человеком)

Порог: $A = 140 \text{ дБ}$
 Разговор: $A = 40 \div 60 \text{ дБ}$
 Улица: $A = 70 \div 80 \text{ дБ}$

3

Шкала э/м волн



$c = \frac{1}{\sqrt{\mu_0 \epsilon_0}}$ - ск-ть э/м волны в матер. среде

 μ_0 - магнит. проницаемость const, ϵ_0 - диэлектрич. проницаемость const

 В вакууме: $\epsilon = \mu = 1 \Rightarrow c_0 = 3 \cdot 10^8 \frac{\text{м}}{\text{с}}$

$c = c_0/n$ — скорость изм-ния ск-ти света при переходе из вакуума в др-ую среду
 $n = \sqrt{\epsilon \cdot \mu}$ — показатель преломления

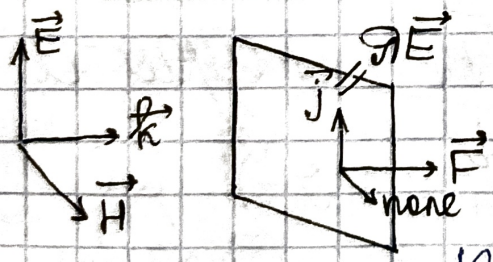
$P_{\text{света на пов-ти}} = \frac{S}{c} (1 + R) = W (1 + R)$ // случай норм. падения?

S — площадь поверхности (пов-ти, на к-та падает свет)
 c — ск-ть света
 W — объем пл-ть энергии
 R — коэф-т отражения пов-ти

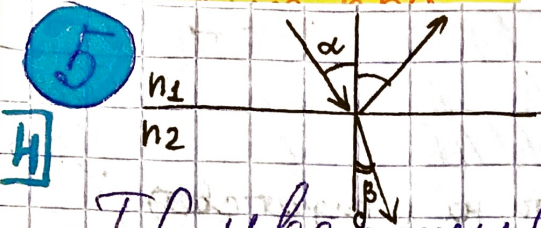
Физ. смысл: P э/м излучения явл-ся $\Rightarrow$ т.е. что оно, как и в др-ой матер. объект, обладающий энергией E и движущ-ся со ск-тью v , темже обладает импульсом $p = E/v$
 $\Rightarrow$ $h \cdot v = c \cdot d(\text{э/м излуч-я}) \Rightarrow p = E/c$

• Корпускулярное описание: $\text{if } \neq \text{ свет как поток фотонов} \Rightarrow$ $\text{принципы класс. механики} \Rightarrow$ частицы при ударе о тело должны передавать ему импульс (т.е. оказывать давление)

• Волнов. описание: э/м волна — изменяющаяся и взаимосвязанные во времени и пр-ве колебания эл. и магнит. полей



При падении э/м волны на отражающ. пов-ть эл. поле возбуждает токи в приповерхност. слое, на к-е действует магнит. составляющая волны
 $d\vec{F} = I [d\vec{l}, \vec{B}]$ // Файнера // сила свет давления



$n_1 \sin \alpha = n_2 \sin \beta$ — закон преломления света (Снеллиуса)

If увеличивать α , то приходим к $\sin \alpha = n_2/n_1 \leq 1 \Rightarrow \alpha = \arcsin(n_2/n_1)$ — критическому углу $\Rightarrow$ свет не попадает во 2-ую среду (волна представляет распространяться вдоль границы) $\Rightarrow$ возникает полное внутр. отражение. Условие возникновения эффекта: $n_1 > n_2$ (свет падает из более оптически плотной среды)

В основе волоконно-оптич. связи лежит явление ПВО э/м волн на границе раздела двух сред. Оптоволокну состоит из двух эл-тов: сердцевинки и оболочки: $n_c > n_{об} \Rightarrow$ луч, испытывая множественные отражения распространяется в сердцевинке, не покидая ее.

6 $\xi(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos \omega_n t + b_n \sin \omega_n t)$, где

$\Omega = 2\pi/T$ — интервал и/частотам спектра,

$\omega_n = n\Omega = \frac{2\pi n}{T}$, $n = 1, 2, \dots$; $a_n = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} \xi(t) \cos \omega_n t dt$,

$b_n = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} \xi(t) \sin \omega_n t dt$.

($\xi(t)$ в виде разложения в ряд Фурье)

Такое представление означает, что спектр $S(\omega)$

периодич. сигнала явл-ся дискрет., т.к. содержит только дискрет. набор частот ω_n (они эквидистантны)

$$[\xi(t) = \sum_{-\infty}^{+\infty} d_n e^{i\omega_n t}, \text{ где } d_n = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} \xi(t) e^{-i\omega_n t} dt] // \text{Согласно}$$

$$[S(\omega) = \sum_{-\infty}^{+\infty} d_n \delta(\omega - \omega_n)] - \text{как } \sum \text{ символических } \delta\text{-ф-ций Дирака}$$

2) $[\xi(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} S(\omega) e^{i\omega t} d\omega]$ - одноконтинуальный импульс
имеет сплошной спектр $[S(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \xi(t) e^{-i\omega t} dt]$
в д. частота ω мен-ся непрерывно

$$// F(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\omega x} f(\omega) d\omega \text{ (прямое ПФ)}$$

$$f(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-i\omega x} F(x) dx \text{ (обратное ПФ)}$$

Св-ва ПФ: $\int \xi_1(t) \leftrightarrow S_1(\omega), \xi_2(t) \leftrightarrow S_2(\omega)$

1) Линейность: $\alpha_1 \xi_1 + \alpha_2 \xi_2 \leftrightarrow \alpha_1 S_1 + \alpha_2 S_2$

2) Запаздывание: $\xi_1(t - t_0) \leftrightarrow S_1(\omega) e^{-i\omega t_0}$

3) Смещение: $\xi_1(t) e^{i\omega_0 t} \leftrightarrow S_1(\omega - \omega_0)$

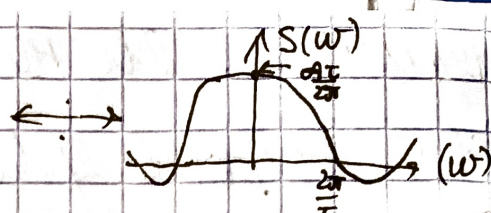
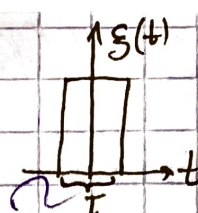
4) Свертка: $\xi_1 \xi_2 \leftrightarrow S_1 \otimes S_2 = \int_{-\infty}^{+\infty} S_1(\gamma) S_2(\omega - \gamma) d\gamma$
 $S_1 S_2 \leftrightarrow \xi_1 \otimes \xi_2 = \int_{-\infty}^{+\infty} \xi_1(\theta) \xi_2(t - \theta) d\theta$

↓ О ширине частот. полосы: $\Delta t \Delta \omega \geq 2\pi$
(знак "=", только if при $t=0$ у всех гармоник фазы совпадают)
(чем шире полоса частот, тем короче волновой пакет,
чем меньше полоса частот, тем длиннее импульс)

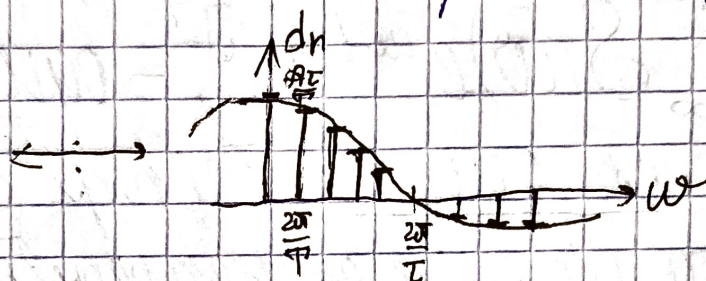
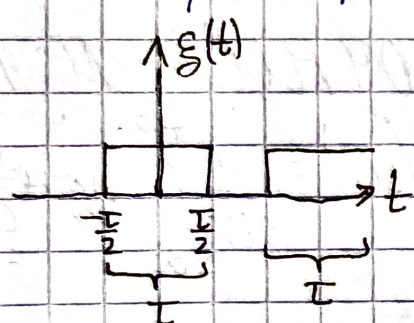
$$[\xi(t) = \frac{\Delta t}{2\pi} \text{sinc} \frac{\omega T}{2}] \text{ спектр узкополосного сигнала}$$

6 $\xi(t) = 1, |t| \leq T/2$
 $0, |t| > T/2$

(*)



Спектр периодической посл-ти прямоуг. импульсов: $\xi(t) = 1_{t \in [0, T]}$
 $d_n = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} \xi(t) e^{-i\omega_n t} dt = \frac{\Delta t}{T} \text{sinc} \frac{\omega_n T}{2}$



8 $\xi(j) \leftrightarrow S(n), n=0, N-1$ // в как-в виде нужна дискрет ф-ция
 $S(n) = \frac{1}{N} \sum_{j=0}^{N-1} \xi(j) W_N^{-nj}$, где $W_N = e^{-\frac{i2\pi n j}{N}}$ — n-ая гармоника в j-й т. массива из N т.
 $t \rightarrow t_j = nT$ — номер узла
 Δt — шаг сетки (дискретизации времени)

$\xi(t) \rightarrow \xi(j) = \xi(nT) = \xi(t_j) = \xi_h(t)$ — дискрет аргумента
 $\Rightarrow$ происходит периодизация спектра $S_h(\omega) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} S(\omega - n/\Delta t)$ с частотой периодизации $1/\Delta t$.
 Частота Найквиста $f_n = 1/(2\Delta t)$ — макс частота, при д еще возможно воспроизвести сигнал по спектру без ошибок на сетке с шагом Δt .
 If частота $> f_n$, то происходит перекрытие

спектров и возникают ошибки при распознании (наложение частот)

Котельникова - Шеннона: If $\xi(t)$ имеет огр. спектр, т.е. $S(\gamma) = \begin{cases} 0, & |\gamma| > \gamma_{\max} \\ \neq 0, & |\gamma| \leq \gamma_{\max} \end{cases}$, то

$$\xi(t) = \sum_{j=-\infty}^{+\infty} \xi(h_j) \Phi_{k-\omega}(t, j) \text{ при } h: \gamma_h \geq \gamma_{\max}, \text{ где}$$
$$\Phi_{k-\omega}(t, j) = \operatorname{sinc} \frac{\pi(t - h_j)}{h} \quad // \text{т.е. } T \text{ подтверждает возможность передачи данных (можно восстановить аналог. сигнал по дискретизации)}$$

10 Дисперсия - завис-ть фаз. ск-ти волн от частоты, вследствие λ происходит изменение формы импульса, волнового пакета и распространения

$$v_{гр} = \left. \frac{\partial \omega}{\partial k} \right|_{k_0} - \text{груп. ск-ть} - \text{ск-ть распростра-ния огибающей}$$

1ое приращение теории дисперсии: дисперсия проявл-ся при распространении в среде группы волн, независ. волн. пакетом. $(\Delta k \ll k_0, \Delta \omega \ll \omega_0)$
 $\xi(x, t) = \int_{k_0 - \Delta k}^{k_0 + \Delta k} a(k) e^{i(\omega t - kx)} dk$. В 1 ПТФ волн. пакет распростран-ся, не искажаясь, а ск-ть его распростран-ния = групп. ск-ти. Огибающей авл-ся

$$A(x, t) = \int_{k_0 - \Delta k}^{k_0 + \Delta k} a(k) e^{i(\omega_{gr} t - \omega(k)(x - k_0))} dk$$

$$[\omega_{gr}(A) = c(A) - A \frac{\partial c(A)}{\partial A}] - \text{ф-ла Релея}$$

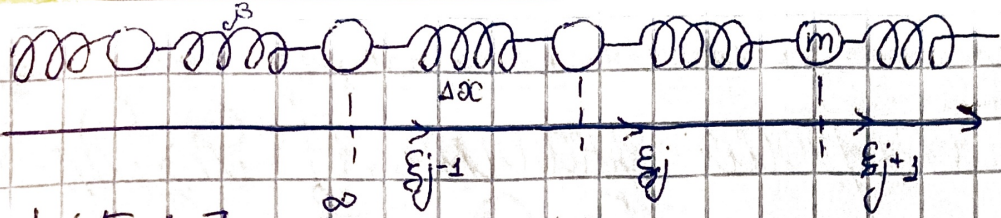
2 ПТД: надо учитывать след. члены разложения $\omega_{gr}(k) = \frac{\partial \omega}{\partial k}|_{k_0} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \omega}{\partial k^2} (k - k_0)^2$ ввиду того, что пакет с широким интервалом чисел $\Rightarrow$ будут разные групп. ск-ти $\omega_{gr}(k_0 - \Delta k)$ и $\omega_{gr}(k_0 + \Delta k)$. Расширение интервала волн чисел Δk и ширины спектра ω вызвано необходимостью повысить ск-ть передачи инф-ции $\Rightarrow$ сократить длитель-ть импульсов (т.о частот. полосе)
 Н.О. оптимальная длитель-ть импульса, при к достижается макс ск-ть передачи инф-ции зависит от дисперсионных св-в среды связи

Математическая формулировка

1 ПТД: $\frac{\partial A}{\partial x} + \frac{1}{v_{gr}} \frac{\partial A}{\partial t} = 0$ / ур-ние переноса

2 ПТД: $\frac{\partial A}{\partial x} + \frac{1}{v_{gr}} \frac{\partial A}{\partial t} - \frac{i}{2} \left| \frac{\partial^2 k}{\partial \omega^2} \right| \frac{\partial^2 A}{\partial t^2} = 0$ / ур-ние диффузии волн пакета $A(x, t)$

Средневероятно складывает дисперсией $\Rightarrow$ форма волн. пакета искажается, его длительность $\uparrow$, ск-ть передачи инф-ции $\downarrow$



// Бесконечная цепочка

Пространство дискретно, время непрерывно

$$K[\xi_j] = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \frac{m}{2} (\dot{\xi}_j)^2$$

$$P[\xi_j] = \sum_{j=-\infty}^{\infty} \frac{\beta}{2} (\xi_j - \xi_{j-1})^2 \Rightarrow \text{уравнение Лагранжа} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \xi_j - \frac{\beta}{m} \Delta^2 \xi_j(t) = 0, j = -\infty, +\infty \Rightarrow \ddot{\xi}_j - c_0^2 \frac{\Delta^2 \xi_j}{\Delta x^2} = 0$$

(xi_{j-1} - 2xi_j + xi_{j+1})

- дифф-разност. ур-ние, где $c_0^2 = \frac{\beta \Delta x^2}{m}$

$k \Delta x = \alpha \Rightarrow$ г/цепочки с $\xi_j(t) = a e^{i(\omega t - \alpha j)} \Rightarrow$

$$\Rightarrow \omega(k) = c_0 k \left(\frac{\sin(\alpha/2)}{\alpha/2} \right) \Rightarrow v_{gr} = c_0 \cos \frac{\alpha}{2} \Rightarrow \text{есть дисперсия}$$

1) Длина волн. приближение: $\alpha \ll 1 \Rightarrow$

$\Rightarrow \alpha \gg \Delta x \Rightarrow$ нет дисперсии ($c = v_{gr}$)

2) $\alpha \leq 1 \Rightarrow$ норм дисперсия ($c > v_{gr}$)

3) $\omega > \omega_{max}$ - затухание

Дисперсия разностной схемы

1) Дифф-разност. ур-ние описывает волну в цепочке;

2) Волна в цепочке (дифф-раз ур-нии) имеет дисперсию - это $\Rightarrow$ дискретизация по x

3) Цепочка / д-р ур-ние имеет конечную полосу пропускания / частоту: $\omega_{max} = \omega_0 = 2c_0 / \Delta x, \omega_{min} = \omega_0 = 2\Delta x$

4) Дисперсия сеточная мала, if $\Delta \gg \Delta_0$

5) Сеточ. дисперсия значима, if $\Delta \approx \Delta_0$

10

6) При $\omega > \omega_{\max}$ или $\Delta < \Delta_0$ волна не входит в цепочку (с-му) $\Rightarrow$ реш. неустойчиво!

12 Интерференция — суперпозиция двух или более волн. В рез-те д. происходит перераспределение I в пр-ве

$$I_p = \langle \varepsilon_p(t) \varepsilon_p^*(t) \rangle_t = I_1 + I_2 + 2\sqrt{I_1 I_2} \cos \Delta \varphi$$

$\Delta \varphi = (\Delta k, r) = k\delta$ — фазовый сдвиг
— оптимальная разность хода волн

Волны наз-ся когерентными, if их частоты совпадают, а фазы не мен-ся во времени и пр-ве

Время когерентности — макс время запаздывания τ , при д. $\exists$ инт-ция

Длина ког-ти — макс разность хода δ , при д. инт-ция есть

$$L_{\text{ког}} = \tau_{\text{ког}} \cdot c$$

$\Delta \varphi = \frac{\pi}{2} \sin \frac{\alpha}{2}$ — (ширина пересек) — расстояние м/сосед макс (мин)

if на экран падают 2 плоские волны с одинак. частотами и $\angle$ м/волнов в-рамм = α

13. Винера-Сингана установка вписывает связь м/а автокорреляц. ф-цией сигнала $\Gamma(\tau)$ его спектр. пл-тью энергии $G(\omega)$

$$\Gamma(\tau) = \int_{-\infty}^{+\infty} G(\omega) e^{i\omega\tau} d\omega$$

$$G(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \Gamma(\tau) e^{-i\omega\tau} d\tau$$

$\Gamma(\tau) = \langle \xi(t+\tau) \cdot \xi^*(t) \rangle_t \rightarrow$ завис-ть взаимосвязи м/а функций (сигналов) и ее св-ва от величины времени сдвига

$G(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int |\xi(\omega)|^2 \rightarrow$ энергия, а содержит непр-но-во парциональ в единице некое делит, взятая на частоте ω

14. Сложим N когерентных волн $\Rightarrow$

$\Rightarrow I_r(\varphi) = I_0^2 \frac{\sin^2 \frac{N\varphi}{2}}{\sin^2 \frac{\varphi}{2}}$, где $\varphi = k d \sin \theta$

уменьшение распределения I при увеличении м/а-ции расст. м/волнами уменьшение

$\Delta\theta = \theta / (Nd) = \frac{1}{2} (\theta^+ - \theta^-)$ — ширина главных макс-ов

15. Дифракция — отклонение распр-ния волн от прямолинейного, а не обусловлено отражением или распределением в среде с преломлением

Принцип Гюйгенса-Френеля

1) Поле на экране $E_{\text{экp}} = 0$

2) $E_{\text{отв}}$ — не возмущена экраном, $E_{\text{отв}} = E_s(M)$

совпадает с полем в отсутствие экрана $M \in \Sigma_{\text{отв}}$

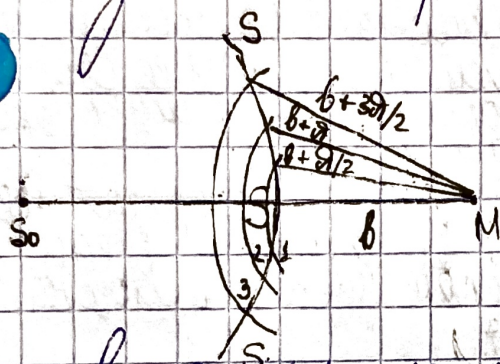
Тогда $E(P) = \frac{1}{4\pi} \sum_{\sigma \in \sigma_b} \left(E_s(M) \frac{\partial G}{\partial n} - G \frac{\partial E_s(M)}{\partial n} \right) d\sigma_{\sigma b}$

42

- формула Гельмгольца-Кирхгофа

В соотв. с этими приближениями интеграл ф-ла Г-К становится интегралом от извест. выр-ния

16



Зоны Френеля - участки, на к-х можно разбить пов-ть волны Σ для вычисления

рез-ов дифракции света

От точеч. источника S_0 распр-ся сферич. волна. Треб-ся определить харак-ки волн. процесса в т. М

Пов-ть волны Σ делим на кольца зоны тако-го размера, чтобы расст-я от краев зоны до т. М отличалась на $\lambda/2$. Кольцеобразн. участ-ки - зоны Френеля

Согласно принципу Гюйгенса-Френеля, действие источника S_0 ~ действию источ-ников на поверх-ти Σ , т.е. амплитуда дифра-гированной волны в т. М = Σ суммирования

E_n , создаваемых зонами Френеля

$$E(M) \approx \sum_{n=0}^N E_n, E_n = E_0 \frac{e^{-ik(r_0 + \rho)}}{r_0 + \rho} K_n (-1)^{n-1}$$

17 Эффект Талло - эффект дифракц. самовоспроизведения свет поля с периодической следующей амплитуды в π -ти, $\perp$ π -ти направления распространения (самовоспроизведение изображения периодич. решетки)

Решение параболич. ур-ние дифракции:
 $A_n(z) = A_n(0) e^{i\varphi_n(z)}$, $\varphi_n(z) = \frac{\pi n^2 z}{a^2}$ - дифракц. набел фазы

$A(x, z_t) = A(x, 0)$ при $z_t = 2a^2/\lambda$ - расстояние
 ние Талло ($\varphi_n(z_t) = 2\pi$) - расстояние, на х
 свет. поле $g(x, z_t, t)$ в монохромат. волне
 восст-ся

18 $I(\theta) = I_0 \text{sinc}^2\left(\frac{k b \sin \theta}{2}\right)$ - ширина щели $\leftarrow$ $\frac{\pi}{2}$ / нормалью к π -ти щели и направлением на т. наблюд. - угловое распределение

I при дифракции на щели (при норм. падении плоск. волны на щель)

Дифракц. расх-ть - уширение свет. пучка
 засвет дифракции на краях отверстия: $\Delta\theta = \frac{1}{2}(\theta^+ - \theta^-) = \frac{\theta}{b}$ // угл. ширина центр. макс

19 $\square$ λ - длина волны, R - размер отверстия (пар-р размера волны),
 z - расстояние от щели до экрана, $R_1 = \sqrt{\lambda z}$ -
размер 1й зоны Френеля (считаем, что фронт плоский)

1) Големетр оптики: $[R \gg \sqrt{\lambda z}, N_F \gg 1]$ (огромное число зон Френеля в пределах отверстия)

2) Дифракция Френеля: $[R = \sqrt{\lambda z}, N_F = 1, 10]$ -
(счетное число зон) (т.к. размер отверстия сопоставим с радиусом 1й зоны R), оптимальная зона дифракции

3) Дифракция Фраунгофера: $[R \ll \sqrt{\lambda z}, N_F \ll 1]$
(в отверстие не укладывается даже 1 зона Фр.)
дальняя зона дифракции

20 Лазер - уст-во, преобразующее энергию накачки в энергию когерентного, монохроматического, поляризованного и узконаправленного потока излучения

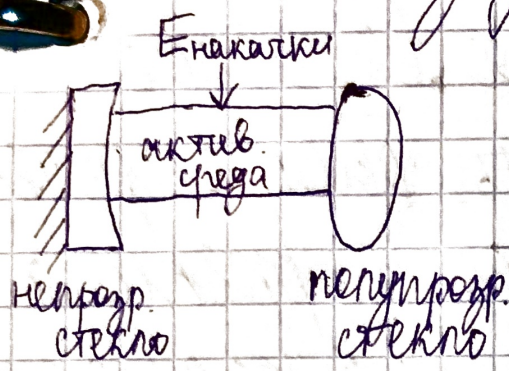
(Лазер $\leftarrow$ Laser // light Amplification by Stimulated Emission Radiation ~ усиление света посредством вынужд. излучения)

Св-ва лазер. излучения:

- 1) когерентное (следствие вынужденности, стимулируемого перехода)
- 2) направленное (разность фаз колебаний const)

обратная связь д/излучения по оси

3) высоко мощностное (малый разброс частот, излучение на одной частоте)

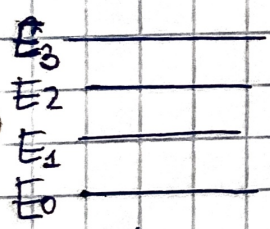


О/лазера необх. 3 компонента:

1) Активная среда (Среды усиления) (С₀2, рубин, гранат) практически

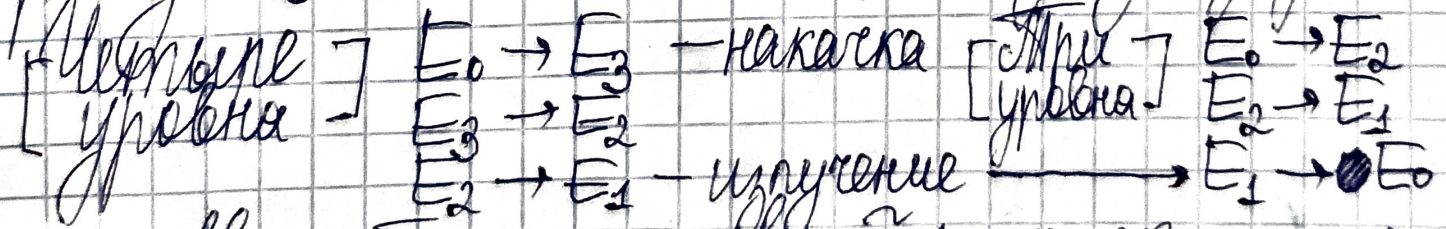
и в-во мб. ею, главное, чтобы была жость какая-то прозрачность

2) С-ма накачки: накачка возможна посредством хим. реакции эл. заряда, сфокусиров. солнеч. излуч-а, накачка-передача энергии внешн. источника в работ. среду лазера



Атом из $E_0 \rightarrow E_3$ в возбужд. состоянии, безызлучательный переход

переход $E_3 \rightarrow E_2, E_2 \rightarrow E_1$ (спонтан. излучение)



Не мб. < 3х уровней накачки, т.к. инверсия населенности атомов с E_0 на E_1 вып-ть не

3) Оптический резонатор — с-ма двух зеркал
— полнит. обрат. связь д/генерации

В лазерах достигается высокая концентрация энергии, локализованная во времени и пр-ве. Это позволяет вып-ть быстропроводящие процессы: фотосинтез, коррекция зрения, резка металла, сред-ние расстояния до цели